Mathématiques - TDN^o 6

1 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

1. $37x + 22y = 1$
2. $9348a + 1640b = 164$
3. $545u - 1130v = 35$

2 —

1) Démontrer que pour tout entier relatif n, les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.

2) On considère l'équation : (E) $87x + 31y = 2$

   a) Vérifier, à l'aide de la première question que 87 et 31 sont premiers entre eux.

   b) En déduire un couple $(u\ ,\ v)$ d'entiers relatifs tels que $87u+31v = 1$ puis un couple $(x_0\ ,\ y_0)$ solution de (E).

   c) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

3) **Application.** Trouver les points de la droite d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 10

3 —

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.
Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1.

1) Soient u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1. Montrer que le couple $(u\ ;\ v)$ est solution de l'équation (E_1) : $35x - 27y = 2$.

2) a) Déterminer un couple de relatifs $(x_0\ ,\ y_0)$ solution particulière de l'équation (E_2) :

$$35x - 27y = 1$$

   b) En déduire une solution particulière $(u_0\ ;\ v_0)$ de (E_1).

   c) Déterminer toutes les solutions de l'équation (E_1).

   d) Déterminer la solution $(u\ ;\ v)$ permettant de déterminer J_1.

3) a) Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?

   b) Le jour J_0 était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour J_1 ? (L'année 2000 était bissextile.)

   c) Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devra t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

4 —

Antilles-Guyane juin 2014

En montagne, un randonneur a effectué des réservation dans deux types d'hébergement : L'hébergement A et l'hébergement B.

Une nuit en hébergement A coûte 24 € et une nuit en hébergement B coûte 45 €.
Il se rappelle que le coût total de sa réservation est de 438 €.

On souhaite retrouver les nombres x et y de nuitées passées respectivement en hébergement A et en hébergement B

1) a) Montrer que les nombres x et y sont respectivement inférieurs ou égaux à 18 et 9.

   b) Recopier et compléter pointillés de l'algorithme suivant afin qu'il affiche les couples $(x\ ,y)$ possibles.

```
Variables : x, y entiers
Traitement
    pour x variant de 0 à . . . . . .  faire
        pour y variant de 0 à . . . . . .  faire
            si . . . . . . . . .  alors
                Afficher x et y
            fin
        fin
    fin
```

2) Justifier que le coût total de la réservation est un multiple de 3.

3) a) Justifier que l'équation $8x + 15y = 1$ admet pour solution au moins un couple d'entiers relatifs.

   b) Déterminer une telle solution.

   c) Résoudre l'équation (E) : $8x+15y = 146$ où x et y sont des nombres entiers relatifs.

4) Le randonneur se souvient avoir passé au maximum 13 nuits en hébergement A.
Montrer alors qu'il peut retrouver le nombre exact de nuits passées en hébergement A et celui des nuits passées en hébergement B.
Calculer ces nombres.

5 —

Métropole juin 2011

Partie A - Restitution organisée de connaissances

On rappelle ci-dessous le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.

Théorème de Bézout :
Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si, il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs vérifiant $au + bv = 1$.

Théorème de Gauss :
Soient a, b, c des entiers relatifs.
Si a divise le produit bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

1) En utilisant le théorème de Bézout, démontrer le théorème de Gauss.

2) Soient p et q deux entiers naturels tels que p et q sont premiers entre eux.
Déduire du théorème de Gauss que, si a est un entier relatif, tel que $a \equiv 0\ [p]$ et $a \equiv 0\ [q]$, alors $a \equiv 0\ [pq]$.

PARTIE B

On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\begin{cases} n \equiv 9\ [17] \\ n \equiv 3\ [5] \end{cases}$$

1) Recherche d'un élément de $\mathscr{S}$.
   On désigne par (u, v) un couple d'entiers relatifs tel que $17u + 5v = 1$.
   a) Justifier l'existence d'un tel couple (u, v).
   b) On pose $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$.
      Démontrer que n_0 appartient à $\mathscr{S}$.
   c) Donner un exemple d'entier n_0 appartenant à $\mathscr{S}$.
2) Caractérisation des éléments de $\mathscr{S}$
   a) Soit n un entier relatif appartenant à $\mathscr{S}$.
      Démontrer que $n - n_0 \equiv 0\ [85]$.
   b) En déduire qu'un entier relatif n appartient à $\mathscr{S}$ si et seulement si n peut s'écrire sous 1a forme $n = 43 + 85k$ où k est un entier relatif.
3) Application
   Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons. Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9. Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3.
   Combien a-t-elle de jetons ?

Note : cet exercice fait référence à ce qu'on appelle le théorème chinois :
"Une bande de 17 pirates possède un trésor constitué de pièces d'or d'égale valeur. Ils projettent de se les partager également, et de donner le reste au cuisinier chinois. Celui-ci recevrait alors 3 pièces. Mais les pirates se querellent, et six d'entre eux sont tués. Un nouveau partage donnerait au cuisinier 4 pièces. Dans un naufrage ultérieur, seuls le trésor, six pirates et le cuisinier sont sauvés, et le partage donnerait alors 5 pièces d'or à ce dernier. Quelle est la fortune minimale que peut espérer le cuisinier s'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?"

6 —

BAC

1) On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$, où $(x\ ;\ y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.
   a) Donner une solution particulière de l'équation (E).
   b) Résoudre l'équation (E).
2) Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple $(a\ ;\ b)$ de nombres entiers vérifiant :

$$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2. \end{cases}$$

   a) Montrer que le couple $(a\ ;\ -b)$ est solution de (E).
   b) Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?
3) a) Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$, où $(x\ ;\ y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

b) Au VIII^{e} siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

7 —

1) On considère l'équation où x et y sont des entiers relatifs : (E) $6x + 7y = 57$

   Déterminer un couple d'entiers relatifs $(u; v)$ tel que $6u + 7v = 1$. En déduire une solution particulière $(x_0; y_0)$ de l'équation (E).

2) Déterminer les couples solutions de l'équation (E).

3) Soit $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace.

   On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation : $6x + 7y + 8z = 57$.

   On considère les points du plan $\mathscr{P}$ qui appartiennent aussi au plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

   Démontrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels et déterminer les coordonnées de ce point.

8 —

Prendre toutes les initiatives

28 personnes participent à un repas gastronomique. Le prix normal est de 26 € sauf pour les étudiants et les enfants qui paient respectivement 17 et 13 euros. La somme totale recueillie est de 613 €.
Calculer le nombre d'étudiants et d'enfants ayant participé au repas. Proposer un algorithme puis deux méthodes pour résoudre ce problème.

9 —

Prendre toutes les initiatives

En multipliant mon jour de naissance par 12 et mon mois de naissance par 31, j'obtiens 442.
Quelle est ma date de naissance ? On proposera un algorithme puis une méthode pour résoudre ce problème. (*On ne demande pas l'année, ouf !*)