Mathématiques - TDN^o 4

1 Les entiers 61, 661, 6661, 66661 sont-ils premiers ?

2 Pour tout nombre premier p supérieur ou égal à 5, l'entier $p^2 - 1$ est il divisible par 24 ?

3

1. Écrire la décomposition en facteurs premiers de 5! et 6!.
2. En déduire celle de $(5!)^2(6!)^5$.
3. Écrire la décomposition en facteurs premiers de $(2017)^{2017}$.

4 Démontrer que si la somme de deux entiers naturels est un nombre premier, alors ils sont premiers entre eux.

5 Vérifier pour $n = 40, 52, 60, 118, 220.$ la conjecture de GOLDBACH : Tout entier naturel pair est la somme de 2 nombres premiers.

6

1. Justifier que 503 est un nombre premier.
2. Déterminer deux entiers naturels x et y tels que $x^2 - y^2 = 503$.

7 Soit p un nombre premier. Existe-t-il un entier n pour lequel n et $n + p$ soient simultanément des carrés ?
On dit qu'un entier naturel n est un carré s'il s'écrit $n = k^2$,*où k est un entier naturel*

8

1. Développer $(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$ pour $a \in \mathbb{N}$
2. Le nombre $a^4 + a^2 + 1$ peut-il être premier ?

9

1. Quel est le plus petit entier qui multiplié par 1998 donne un carré parfait ?
2. Même question avec 2016.
3. Et pour 2017 ?

10 Quel est le nombre de diviseurs de 10! ?

11 Démontrer que la somme de deux nombres premiers n'est jamais un nombre premier.

12

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, factoriser $Q(n) = 4n^2 - 248n + 3843$.
2. Démontrer que $Q(n)$ est impair.
3. Existe-t-il un entier n pour lequel $Q(n)$ soit le produit de deux nombres premiers ?

13 **Partie A**

On admet la propriété suivante :Si p est un nombre premier avec $p \neq 2$, alors $2^{p-1} \equiv 1 \quad (p)$

1. Vérifier cette propriété pour $p = 5$ et $p = 7$.
2. Soit k un entier tel que $2^k \equiv 1 \quad (p)$. Démontrer que si n est un multiple de k alors $2^n \equiv 1 \quad (p)$

Partie B

Le but de cette partie est de montrer que $N = 2^{17} - 1$ est un nombre premier.

1. On suppose que N n'est pas premier et on considère un facteur premier p de N. Montrer que $2^{17} \equiv 1 \quad (p)$
2. Soit b le plus petit entier tel que $2^b \equiv 1 \quad (p)$ et n un entier tel que $2^n \equiv 1 \quad (p)$. En considérant la division euclidienne de n par b, Montrer que b/n.
3. a) Comme $2^{17} \equiv 1 \quad (p)$; justifier que si b est le plus petit entier tel que $2^b \equiv 1 \quad (p)$, alors $b = 17$.
   b) En déduire que $p - 1$ est un multiple de 17.
   c) Si on cherche à déterminer un facteur premier de $2^{17} - 1$, il suffit de trouver un nombre premier p tel que : $2^{17} \equiv 1 \quad (p)$.
   Soit, d'après les questions précédentes, il suffit de chercher p premier tel que $2^{p-1} \equiv 1 \quad (p)$. C'est à dire que $p - 1$ soit un multiple de 17.
   Démontrer que $p - 1$ est un multiple de 34.
   d) Existe-t-il alors un nombre premier $p < \sqrt{N}$ de la forme $p = 34k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) qui divise N ?
   e) Conclure.

14 On rappelle que p et q sont solutions de l'équation $x^2 - (p + q)x + pq = 0$.
Vous pouvez démontrer ce résultat ;)

1. Justifier que 2017 est un nombre premier.
2. On considère l'équation $(E)\ :\ n^2 - Sn + 12102 = 0$ avec $(n,S) \in \mathbb{N}^2$.
   a) Peut-on déterminer un entier S tel que 3 soit solution de (E) ? Si oui préciser la valeur de S.
   b) Même question pour 5.
   c) Montrer que toute solution de (E) est un diviseur de 12102.
   d) En déduire toutes les valeurs possibles de S.

15 Dans cet exercice, on se propose de montrer que pour tout entier premier $p \geq 7$, le nombre $n = p^4 - 1$ est divisible par 240.

1. Vérifier que $240/n$ pour $p = 7, 11, 13, 17, 19$.
2. Montrer que $p \equiv 1\,\text{ou} - 1 \quad (3)$. Et en déduire que n est divisible par 3.
3. Quelle est la parité de p ? En déduire qu'il existe un entier k tel que $p^2 - 1 = 4k(k+1)$ et donc que $8/(p^2 - 1)$.
4. En déduire que $16/n$.
5. En considérant les restes possibles de la division euclidienne de p par 5, montrer que $5/n$.
6. a) Soient a, b, et $c \neq 0$ trois entiers naturels avec a et b premiers entre eux.
   Montrer que : Si a/c et b/c alors ab/c.
   b) En déduire que $240/n$.
7. *Une petite dernière* :)
   Peut on trouver 15 nombres premiers $p_1, p_2,...p_{15}$ supérieurs ou égaux à 7 tels que $A = p_1^4 + p_2^4 + ...p_{15}^4$ soit premier.
   $\boxed{\textit{Astuce :Poser } A = A - 15 + 15}$