

Mathématiques - TD N° 3

1 Les congruences suivantes sont-elles exactes ?

1. $132 \equiv 47 \pmod{15}$.
2. $-29 \equiv 131 \pmod{28}$.
3. $1214 \equiv -8 \pmod{44}$.
4. $899 \equiv -1 \pmod{45}$.

2 Déterminez x dans chaque cas.

1. $218 \equiv x \pmod{11}$ sachant que $0 < x < 11$.
2. $-1116 \equiv x \pmod{23}$ sachant que $-23 < x < 0$.
3. $7000 \equiv x \pmod{102}$ sachant que $-102 < x < 0$.

3 Soient x et y deux entiers naturels tels que $x \equiv 7 \pmod{9}$ et $y \equiv 4 \pmod{9}$.

Déterminez les restes dans la division euclidienne par 9 de :

1. $3x + 4y$.
2. $x^2 + y^2$.
3. $2x^2 - 5y^2$.

4 En étudiant les congruences modulo 5, Montrez que si x, y et z sont des entiers tels que $x^2 + y^2 = z^2$, alors l'un au moins est divisible par 5.

Ici on utilisera le fait que : Si la relation $x^2 + y^2 = z^2$ est vraie alors elle reste vraie modulo 5.

5 Soient a et b deux entiers positifs avec $a > b$.

Montrez que l'un au moins des nombres $a, b, (a + b), (a - b)$ est multiple de 3.

On examinera les restes possibles modulo 3.

6 Divisibilité par 3.

le nombre 71376 est un multiple de 3, car comme vous le savez sans doute la somme des chiffres $7 + 1 + 3 + 7 + 6 = 24$ est un multiple de 3.

Nous allons démontrer ce résultat :

1. Écrire la décomposition en puissance de 10 de 71376.
2. En déduire que $71376 \equiv 24 \pmod{3}$.
3. Conclure.
4. De manière générale tout entier naturel N s'écrit : $N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_0$ avec $n \in \mathbb{N}$. Montrer alors que N est un multiple de 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.

7 Critère de divisibilité.

1. En vous inspirant de l'exercice précédent, montrez qu'un entier naturel N est un multiple de 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.
2. Avec la même démarche, déterminer un critère de divisibilité par 4.

8 On considère les entiers naturels s'écrivant $\forall n \in \mathbb{N}, N = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

1. Montrez que $3^{2n+1} \equiv 3 \times 2^n \pmod{7}$.
2. Montrez que $2^{n+2} \equiv 4 \times 2^n \pmod{7}$.
3. En déduire que N est un multiple de 7.

9

1. Quel est le reste de la division euclidienne de 8^{237} par 9 ?
2. Quel est le reste de la division euclidienne de 7^{888} par 15 ?

3. Quel est le reste de la division euclidienne de 13^{1545} par 11 ?

10

- Déterminez suivant les valeurs de n , les restes de la division euclidienne par 5 de 2^n et 3^n .
- En déduire pour quelles valeurs de n l'entier $1188^n + 2257^n$ est divisible par 5.

11

En examinant l'équation $7x^2 - 4y^2 = 1$ modulo 4. Montrez qu'elle n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}$.

12

a, b et $c \neq 0$, 3 entiers naturels tels que $a \equiv b \pmod{c}$

- Démontrez que $a^2 \equiv b^2 \pmod{c}$.
- Soit x un entier. Montrez que si $(x^2 - 1)^2$ n'est pas un multiple de 4, alors x^2 l'est.

13

Soient a, b, a', b' et $c \neq 0$ des entiers tels que $a \equiv b \pmod{c}$ et $a' \equiv b' \pmod{c}$.

- Démontrez que $aa' \equiv bb' \pmod{c}$.
- Démontrez que $a^n \equiv b^n \pmod{c}$.
- x, y et z sont des entiers. Démontrez que si $x^3 + y^3 + z^3$ est divisible par 9 alors l'un au moins des nombres x, y, z est divisible par 3.

14

Montrez que $2^{2016} - 9$ est un multiple de 11.

15

Montrez que $3^{2016} - 1$ est un multiple de 13.

16

Montrez que $11^{2016} - 1$ est un multiple de 17.

17

Montrez que $17^{2016} - 8$ est un multiple de 31.

Je vous donne ici un programme pour calculer des congruences du type $a^p \equiv ? \pmod{q}$.

PROGRAMME (CASIO)

```
"A^P MOD Q, A=" : ? → A ◀
"P=" : ? → P ◀
"Q=" : ? → Q ◀
1 → B ◀
1 → R ◀
While R < P + 1 ◀
  A × B → B ◀
  B - Q × Int(B/Q) → B ◀
  R + 1 → R ◀
WhileEnd
"A^P CONGRU " : B ◀
```

PROGRAMME (TI 89, 92 TI Voyage 200)

```
mmod()
Prgm
Disp "A^P modulo Q"
Input "Valeur de A : ", a
Input "Valeur de P : ", p
Input "Valeur de Q : ", q
1 → b
1 → r
While r < p + 1
  a * b → b
  b - q * int(b/q) → b
  r + 1 → r
EndWhile
Disp "A^P est congru à : ", b
EndPrgm
```