Mathématiques-TD-N^o1

Outre les méthodes employées, vous devez faire l'effort de rédiger au mieux les solutions. Cela permet de mémoriser les méthodes, de mieux comprendre les notions etc....

1 Démontrer que deux entiers consécutifs impairs sont premiers entre eux.

2

1. Soient a et b deux entiers relatifs tels qu'il existe un couple d'entiers (m,n) pour lesquels $ma + nb = 1$. Démontrer que a et b sont premiers entre eux.
2. Démontrer que si a et b sont deux entiers tels que $8^a = 2 \times 16^b$. Alors a et b sont premiers entre eux.

3

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n+1}{n(n+2)}$ est irréductible.
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n(2n+1)}{n+1}$ est irréductible.

4 Soit $a \in \mathbb{N}$ et un entier $n \geq 4$ tels que $a^2 + 9 = 2^n$. Démontrer que si a existe alors il est impair.

5

1. Montrer que pour tout réel X, $(X-1)(1 + X + X^2 + X^3 + ... + X^{k-1}) = X^k - 1$ pour tout entier naturel $k \geq 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $d > 0$ un diviseur de n, démontrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.
3. En déduire que $2^{2016} - 1$ est divisible par 7,9 et 63.

6 On considère un entier naturel $p \geq 2$, et l'entier $N_p = \underbrace{11..111...1}_{p fois}$.

1. Justifier que $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + ... + 10^0$
2. 11, 111 et 1111 sont-ils premiers (un entier naturel est premier s'il n'admet que 1 et lui même comme diviseur)
3. Prouver que $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$. En déduire que N_p est divisible par 9.
4. On cherche à démontrer que si p n'est pas un nombre premier alors N_p n'est pas premier.
   a) On suppose que p soit un nombre pair et $p \neq 2$. Montrer que N_p est divisible par N_2.
   b) On suppose que $p = 3q$ avec $q > 1$. Montrer que N_p est divisible par N_3.
   c) On suppose que $p = kq$ avec $q > 1$. Montrer que N_p est divisible par N_k.
   d) Conclure.