Les graphes

Introduction

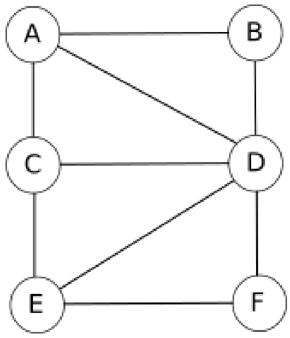
Qu'est-qu'un graphe?
Imaginez un réseau social ayant 6 abonnés (A, B, C, D, E et F) où :

- A est ami avec B, C et D
- B est ami avec A et D
- C est ami avec A, E et D
- D est ami avec tous les autres abonnés
- E est ami avec C, D et F
- F est ami avec E et D

On peut représenter ce réseau social par un schéma où :

- Chaque abonné est représenté par un cercle avec son nom.
- Chaque relation "X est ami avec Y" par un segment de droite reliant X et Y ("X est ami avec Y" et "Y est ami avec X" étant représenté par le même segment de droite).

Voici ce que cela donne avec le réseau social décrit ci-dessus :
Ce genre de figure s'appelle un graphe.
Les graphes sont des objets mathématiques très utilisés, notamment en informatique.
Les cercles sont appelés des sommets et les segments de droites des arêtes.

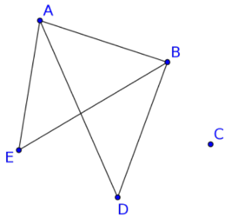


Définition et terminologie

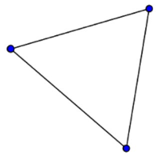
> **Définition :**
> On appelle graphe la donnée d'un ensemble de points appelés **sommets** et d'un ensemble de lignes appelées **arêtes** qui relient certains sommets entre eux.

Ordre d'un graphe :
L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets du graphe.
Adjacents
Deux sommets sont dits adjacents s'ils sont reliés entre eux par une arête.
Degré d'un sommet
Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes issues de ce sommet.
Sommet isolé
Un sommet qui n'est adjacent à aucun autre sommet du graphe est dit isolé.
Graphe complet
Un graphe est dit complet si deux sommets quelconques distincts sont toujours adjacents.
Autrement dit, tous les sommets sont reliés deux à deux par une arête.

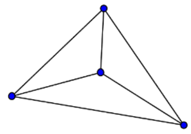
Exemples



Ce graphe est d'ordre 5 car il possède 5 sommets.
Les sommets A et B sont adjacents.
Les sommets D et E ne sont pas adjacents.
Le sommet C est isolé.



Ce graphe est complet d'ordre 3
Chaque sommet est de degré 2



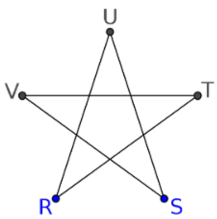
Ce graphe est complet d'ordre 4
Chaque sommet est de degré 3

? Exercice 1 :

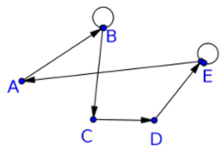
Donner le degré des sommets du graphe sur le réseau social de l'introduction. Donner son ordre. Ce graphe est-il complet ?

Différents types de graphes

Un graphe peut être **orienté** ou **non-orienté**.



Dans un graphe non-orienté, chaque arête peut-être parcourue dans les deux sens



Dans un graphe orienté, chaque arête ne peut-être parcourue que dans un seul sens indiqué par une flèche.

Un graphe (orienté ou non-orienté) peut contenir des boucles c'est-à-dire une arête dont l'origine et l'extrémité correspondent au même sommet (on a par exemple une boucle B sur la représentation précédente).

Propriété de la somme des degrés

Propriété :
Le nombre d'arêtes est égal à la moitié de la somme des degrés des sommets

Ce résultat s'explique assez facilement: en ajoutant les degrés de chaque sommet (c'est à dire le nombre d'arêtes issues de ce sommet), on comptabilise deux fois chaque arête (une fois avec le sommet d'une extrémité et une seconde fois avec le sommet de l'autre extrémité de l'arête). D'où le résultat.
Il découle de cette propriété que la somme des degrés des sommets est nécessairement paire et donc que le nombre de sommets de degré impair est pair.

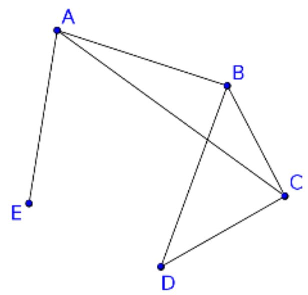
Matrice d'adjacence

Considérons un graphe d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. On numérote ces sommets de 1 à n .

Définition :
On appelle matrice d'adjacence associée à ce graphe la matrice A dont le terme a_{ij} vaut 1 si les sommets et sont reliés par une arête et 0 sinon.
i et j variant de 1 à n.

En numérotant les sommets de ce graphe par ordre alphabétique, sa matrice d'adjacence s'écrit:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Remarque :
Dans le cas d'un graphe non orienté, les coefficients a_{ij} et a_{ji} sont égaux pour tout i et tout j compris entre 1 et n.
Autrement dit, **la matrice d'adjacence est symétrique**.
Dans le cas d'un graphe orienté, la matrice d'adjacence n'est pas a priori symétrique.

Exercice 2 :
Écrire la matrice d'adjacence du réseau social de l'introduction.
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

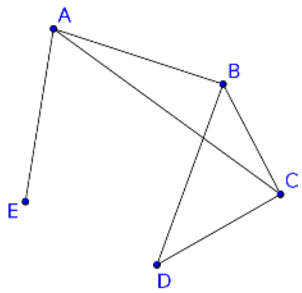
Chaîne et cycle

DÉFINITION :
On appelle **chaîne** toute succession d'arêtes dont l'extrémité de l'une (sauf la dernière) est l'origine de la suivante.

- Le nombre d'arêtes qui composent une chaîne est appelé **longueur de la chaîne**.
- On appelle **chaîne fermée** toute chaîne dont l'origine et l'extrémité coïncident.
- On appelle **cycle** toute chaîne fermée dont les arêtes sont toutes distinctes.

Exemple

Dans le graphe ci-contre :
E-A-C-B est un chaîne de longueur 3.
E-A-C-B-A-E est une chaîne fermée de longueur 5. Ce n'est pas un cycle car l'arête A-E est parcourue deux fois.
D-B-A-C-D est un cycle de longueur 4.



Compléments

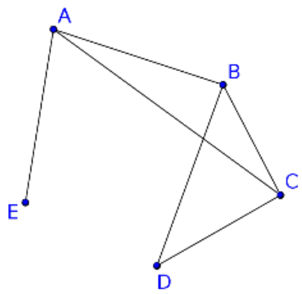
Dénombrer le nombre de chaînes de longueur k

Considérons un graphe d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. On numérote ces sommets de 1 à n . Le terme a_{ij} de la matrice $A^k (k \in \mathbb{N}^*)$ est égal au nombre de chaînes de longueur k reliant les sommets i et j dans ce graphe.

En numérotant les sommets de ce graphe par ordre alphabétique, sa matrice d'adjacence s'écrit: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a : $A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 5 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Il existe donc 5 chaînes de longueur 3 reliant le sommet B au sommet C puisque : $a_{23} = a_{32} = 5$



EXERCICE 3 :
Écrire ces cinq chaînes
....
....
....

Exercice 4 :

À l'aide de ce site(https://matrixcalc.org/fr/) , déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 reliant A et F pour le graphe du réseau social de l'introduction.

. . . .

. . . .

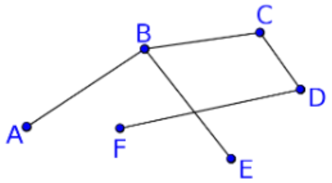
Notion de connexité

Définition :

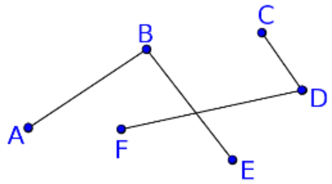
Un graphe est dit **connexe** si deux de ses sommets quelconques sont toujours reliés par une chaîne.

Un graphe est dit **complet** si tous ses sommets sont adjacents deux à deux.

Le graphe ci-dessous est connexe.

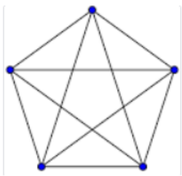


celui-ci ne l'est pas...



Aucun de ces graphes n'est complet...

Celui-ci est complet



Remarque :

Un graphe complet est donc nécessairement connexe mais la réciproque est fausse comme le montre l'un des exemples ci-dessus.

Exercice 5 :

Pour le graphe du réseau social de l'introduction, que dire de sa connexité ?

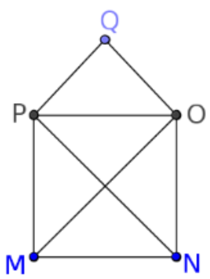
. . . .

. . . .

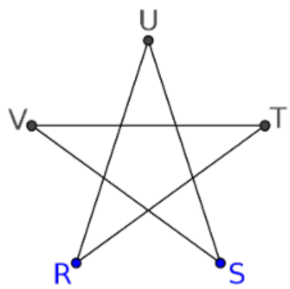
. . . .

Chaînes et cycles eulériens

Définition :
On appelle **chaîne eulérienne** d'un graphe toute chaîne qui contient une fois et une seule toutes les arêtes du graphe.
On appelle **cycle eulérien** une chaîne eulérienne fermée.



La chaîne M-P-Q-O-M-N-P-O-N est une chaîne eulérienne.
En effet, cette chaîne contient bien 8 arêtes toutes distinctes.



Le cycle R-U-S-V-T-R est un cycle eulérien.

Le théorème d'Euler

Théorème :
Soit G un graphe connexe.
G admet un cycle eulérien si et seulement si tous les sommets de G sont de degré pair.
G admet une chaîne eulérienne (non fermée) si et seulement si le nombre de sommets de degré impair dans G est 2.
Si tel est le cas, les extrémités de la chaîne eulérienne sont les deux sommets de degré impair.

Exercice 6 :
Pour le graphe du réseau social de l'introduction, y-a-t'il une chaîne eulérienne ?, un cycle eulérien ?

....
....
....
....
....
....