

Représentation des réels

Les décimaux

 **DÉFINITION :**

Un décimal est un nombre à virgule dont la partie décimale est finie.

- On peut l'écrire : $d = \frac{N}{10^p}$ où $N \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$

Par exemple : $15,325 = \frac{15325}{10^3}$

- On peut le décomposer comme dans l'exemple :

$$15,325 = 1 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 3 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3}$$

Les réels

Un nombre réel est un nombre à virgule (ou pas) et dont la partie décimale est finie ou pas.

- -2 est un réel
- 15,325 est un réel
- $\frac{2}{3} = 0,666666\dots$ est un réel
- $\sqrt{2}$ est un réel

En informatique...

En informatique tous les nombres sont des décimaux, et ce car on est limité en mémoire...
On ne peut coder un nombre exactement si sa partie décimale est infinie.

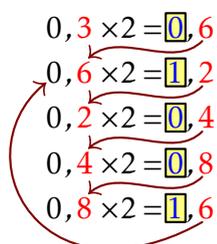
Comment coder un nombre réel ?

Il faut pour cela le décomposer en puissance de deux:

Prenons un exemple : 15,3

La partie entière 15 s'écrit en binaire 1111

Pour la partie décimale, on procède comme suit :



On multiplie la partie décimale par 2
On reporte la partie décimale obtenue que l'on multiplie par 2 et ainsi de suite.
On s'arrête quand la précision est satisfaisante, dans le cas présent, on voit bien que l'on peut continuer indéfiniment...

On obtient :

$$0,3 = 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 0 \times 2^{-4} + 1 \times 2^{-5} + 1 \times 2^{-6} + \dots$$

L'écriture en binaire de 15,3 est : 1111,0 1001 1001 1001 ...

Remarquez la partie qui se répète indéfiniment...

Pour preuve :

$$0,3 = (\boxed{0} + 0,6) \times 2^{-1} = (\boxed{0} + (\boxed{1} + 0,2) \times 2^{-1}) \times 2^{-1} = \boxed{0} \times 2^{-1} + \boxed{1} \times 2^{-2} + 0,2 \times 2^{-2}$$

En remplaçant 0,2 par $(\boxed{0} + 0,4) \times 2^{-1}$, puis 0,4 par $(\boxed{0} + 0,8) \times 2^{-1}$

et enfin 0,8 par $(\boxed{1} + 0,6) \times 2^{-1}$

On obtient bien la décomposition écrite plus haut.

? EXERCICE 1 :

Donner les écritures binaires des nombres

- 17,2
- 35,31
- 5,25
- 0,5
- 128,375
- 0,05

Les nombres rationnels dyadiques

💡 DÉFINITION :

Un nombre rationnel dyadique (ou fraction dyadique) est un rationnel qui peut s'écrire sous la forme : $\frac{N}{2^p}$ où $N \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$

De tels nombres ont des écritures binaires finies.

Par exemple : 0,5 est dyadique

$$0,5 \times 2 = \boxed{1},0$$

$$0,0 \times 2 = \boxed{0},0$$

L'écriture binaire de 0,5 est 0,1

? EXERCICE 2 :

Montrer que ces nombres sont dyadiques

- $\frac{3}{8}$
- 12,75
- 2,375

Du binaire au décimal

Par exemple pour convertir en décimal le nombre binaire 101,11

$$\text{On a : } 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = 4 + 1 + 0,5 + 0,25 = 5,75$$

? EXERCICE 3 :

Convertir en décimal le nombre binaire 101001,10011

